

2. INTEGRAL MÚLTIPLE DE RIEMANN

2.3. Funciones integrables Riemann sobre un rectángulo

Teorema (integrabilidad de las funciones continuas)

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Cualquier función continua $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann sobre R .

Contenido nulo

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **contenido nulo** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de rectángulos $\{R_i\}_{i=1}^N$ tal que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^N R_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N V(R_i) < \varepsilon$$

Propiedades y ejemplos

1. Todo conjunto de contenido nulo debe estar acotado. Por tanto, si un conjunto no está acotado no puede tener contenido nulo.
2. Todo subconjunto de un conjunto de contenido nulo tiene contenido nulo.
3. Cualquier conjunto finito de puntos tiene contenido nulo.
4. Cualquier sucesión convergente de puntos tiene contenido nulo.
5. La unión finita de conjuntos de contenido nulo tiene contenido nulo.
6. El conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado y numerable de puntos que no tiene contenido nulo.
7. El conjunto clásico de Cantor $C \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto, no numerable, que no contiene intervalos y que tiene contenido nulo.
8. Para la propiedad de tener contenido nulo es fundamental el espacio ambiente: un segmento cerrado de interior no vacío no tiene contenido nulo en \mathbb{R} , pero sí tiene contenido nulo en \mathbb{R}^n con $n > 1$.

Lema (el grafo de una función continua tiene contenido nulo)

Si $\varphi : R \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre el rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, entonces su grafo

$$G(f) = \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in R\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

tiene contenido nulo en \mathbb{R}^{n+1} .

Medida nula

Se dice que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **medida nula** si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto numerable de rectángulos $\{R_i\}_{i=1}^\infty$ tal que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^\infty R_i \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^\infty V(R_i) < \varepsilon$$

Propiedades y ejemplos

1. Todo conjunto de contenido nulo tiene medida nula.
2. Cualquier conjunto numerable de puntos tiene medida nula.
3. Existen conjuntos con medida nula que no tienen contenido nulo, por ejemplo el conjunto $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbb{R}$ (y también el conjunto completo \mathbb{Q}).
4. Cualquier subconjunto de un conjunto con medida nula tiene medida nula.
5. La unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.
6. Para la propiedad de tener medida nula es fundamental el espacio ambiente: \mathbb{R} no tiene medida nula en \mathbb{R} , pero sí tiene medida nula en \mathbb{R}^n con $n > 1$.

Teorema de Lebesgue

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $A \subset R \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de discontinuidades de f :

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : f \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\} \subset R \subset \mathbb{R}^n$$

Entonces, f es integrable Riemann sobre R si y sólo si el conjunto A tiene medida nula.

Teorema

Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y $A \subset R \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto de discontinuidades de f :

$$A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : f \text{ es discontinua en } \mathbf{x}\} \subset R \subset \mathbb{R}^n$$

Entonces, si el conjunto A tiene contenido nulo, la función f es integrable Riemann sobre R .

Ejercicios

1. Prueba que $[0, 1]$ no tiene contenido nulo en \mathbb{R} , pero sí lo tiene en \mathbb{R}^2 . Como consecuencia, tener contenido nulo depende del espacio ambiente.
2. Demuestra que si $A \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$ tiene medida nula, entonces $[a, b] \setminus A$ no tiene medida nula, y úsalo para probar que los irracionales del intervalo $[0, 1]$ no tienen medida nula.
3. Prueba que la recta real tiene medida nula en \mathbb{R}^2 . Como consecuencia, tener medida nula depende del espacio ambiente.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. Prueba que en \mathbb{R} la suma de las longitudes de cualquier recubrimiento de $[0, 1]$ es al menos 1. En \mathbb{R}^2 , sin embargo, se pueden conseguir rectángulos que cubren $[0, 1]$ con volumen tan pequeño como se quiera.
2. Si en \mathbb{R} se suman las longitudes de los rectángulos que cubren A con las de los que cubren $[a, b] \setminus A$ se obtiene, al menos, $b - a$. En consecuencia, si los que cubren A pueden medir tan poco como se quiera, no puede ocurrir lo mismo con los que cubren $[a, b] \setminus A$.
3. Dado $\varepsilon > 0$, recubre los intervalos $[n - 1, n]$ y $[-n, -(n - 1)]$, $n \geq 1$, con rectángulos de base 1 y altura $\varepsilon/2^{n+1}$.